تحليل (2) نظري

المحاضرة الحادية عشر والأخيرة

تذكرة: القيمة الرئيسية من النوع الأول

$$V.P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

* إذا كانت الدالة المكاملة $f$ فردية فهي قابلة للمكاملة حسب مفهوم كوشي وتكون القيمة الرئيسية لهذا التكامل مساوية للصفر

$$V.P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$$

* أما إذا كانت الدالة $f$ زوجية فهي قابلة للمكاملة حسب مفهوم كوشي إذا وفقط إذا كان $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ متقارب والقيمة الرئيسية في هذه الحالة هي ضعف التكامل على نصف المجال

$$V.P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

* إذا كانت القيمة الرئيسية للتكامل معتل غير موجودة وغير محددة فهو متباعد حيث أن العكس غير صحيح بالضرورة

مثال: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$

نلاحظ بأن الدالة فردية ولدينا

$$V.P\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{a\to\infty}\underbrace{\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx}_{0}$$

$$= \lim_{a\to\infty}(0) = 0$$

نلاحظ بأخذ القيمة الرئيسية للتكامل يساوي الصفر
بينما نلاحظ أن هذا التكامل متباعد

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx \quad \text{أو} \quad \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} x\,dx$$

$= \infty$ فهو متباعد

(ب) التكاملات المعتلة من النوع الثاني

**مثال:**

$$\int_{1} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t \to 1+0} \int_{t}^{e} \frac{dx}{x\ln x}$$

نلاحظ أن $x=1$ هي حالة شاذة وكذلك أيضاً

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{s \to 1-0} \int_{\frac{1}{2}}^{s} \frac{dx}{x\ln x}$$

* لدراسة تقارب وتباعد التكاملات المعتلة من النوع الثاني نميز الحالات التالية:

(أ) إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في المجال المفتوح من اليمين $[a,b[$ باعتبار أن $b$ نقطة شاذة و $a<b$ وكانت هذه الدالة غير محدودة أو غير معرفة أو غير مستمرة عند النقطة $b$ التي تمثل الطرف الأيمن من المجال

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty \quad (1)$$

أي أن $x$ تسعى إلى $b$ من جهة اليسار

تسمى النقطة $b$ في هذه الحالة نقطة شاذة بالنسبة للدالة $f(x)$ وإذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل

محلياً على المجال $[a, b[$ أي قابلة للمكاملة على أي فترة مغلقة محدودة جزئية $[a, t]$ وذلك لكل $a < t < b$ وعليه إذا كانت النهاية الآتية

$$\lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)\, dx \quad \text{——} \quad (2)$$

$t$ تسعى إلى $b$ من اليسار

موجودة ومحدودة موجودة فنقول بأن التكامل المعمم الآتي

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{b-0} f(x)\, dx$$

يكون متقارب

$$\int_a^{b-0} f(x)\, dx = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)\, dx$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو غير محدودة فيكون التكامل متباعد (غير معرف)

2 إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة ضمن المجال $]a, b]$ على اعتبار أن $a < b$ وكانت هذه الدالة غير محدودة أو غير معرفة أو غير مستمرة عند النقطة $a$ أي

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty \quad \text{——} \quad (3)$$

نسمي النقطة $a$ في هذه الحالة نقطة شاذة بالنسبة للدالة المكاملة $f(x)$ وإذا كانت الدالة $f$ قابلة للمكاملة محلياً على المجال $]a, b]$ أي قابلة للمكاملة على أي فترة مغلقة محدودة جزئية $[s, b]$ حيث $a < s < b$ وعليه إذا كانت النهاية الآتية

$$\lim_{s \to a+0} \int_s^b f(x)\, dx \quad \text{——} \quad (4)$$

$s$ تسعى إلى $a$ من اليمين

إذا كانت النزعية (4) موجودة وحيدة مفتوحة بأن التكامل

المعتل $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx$ متقارب

ويحقق $\int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{s \to a+0} \int_s^b f(x)\,dx$

أما إذا كانت النزعية (4) غير موجودة وغير محددة فإن التكامل

المعتل يكون متباعد

(3) إذا كانت $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ حيث $(a<b)$

وكانت الدالة غير معرفة عند النقطة $c$ حيث $a<c<b$

في هذه الحالة نجزئ التكامل إلى تكاملين

$$\int_a^{c-0} f(x)\,dx + \int_{c+0}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad (5)$$

* إن تقارب التكاملين الموجودين في الطرف الأيسر معاً يقتضي تقارب التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ وتباعد إحداهما على الأقل يقتضي أن يكون التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ متباعد

ومنه في هذه الحالة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c-0} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{s \to c+0} \int_s^b f(x)\,dx \quad (6)$$

ويمكن دراسة بقية الحالات بنفس الطريقة حيث يمكن أخذ النقاط

" $c_1, c_2, c_3, \ldots$ "

ملاحظة: يمكن رد التكامل المعتل من النوع الثاني إلى تكامل معتل

من النوع الأول وذلك بإجراء التحويل الآتي:

من أجل الحالة الأولى (1) إذا كانت b نقطة شاذة

لدينا $x = b - \frac{1}{u}$ عند التعويض نجد

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{1}{u^2} f\left(b - \frac{1}{u}\right) du$$

مثال: ادرس تقارب أو تباعد التكامل المعتل الآتي:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

الحل: نلاحظ أن النقطة الشاذة هي $x=1$ وبالتالي

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \to 1-0} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t \to 1-0} [\arcsin x]_0^t$$

$$= \lim_{t \to 1-0} \arcsin t - 0 = \frac{\pi}{2}$$

فهو متقارب وقيمته تساوي $\frac{\pi}{2}$

مثال: ادرس تقارب أو تباعد التكامل المعتل الآتي:

$$I = \int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \int_0^a \frac{dx}{(x-a)^2} + \int_a^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$I_1 = \int_0^a \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{t \to a-0} \int_0^t \frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$= \lim_{t \to a-0} \left[ \frac{1}{x-a} \right]_0^t = \lim_{t \to a-0} \left[ \frac{1}{t-a} - \frac{1}{a} \right]$$

$$= -\left[ \frac{1}{0^-} - \frac{1}{a} \right] = -\infty$$

ومنه نجد أن $I_1$ متباعد

∴ إن التكامل المعطى $I$ أيضاً متباعد

والتكامل $I$ متباعد أيضاً وستكون النتيجة $+\infty$

اختبارات التقارب والتباعد

[1] : اختبار المقارنة : إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ دالتان مستمرتان على المجال $[a, b[$ حيث $b$ نقطة شاذة لكل من $f(x)$ و $g(x)$ وكان $\forall x \in [a, b[$ ؛ $g(x) \geq f(x) \geq 0$

* نجد أنه من تقارب التكامل المعتل $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ ينتج تقارب التكامل $\int_a^{b} f(x)\,dx$

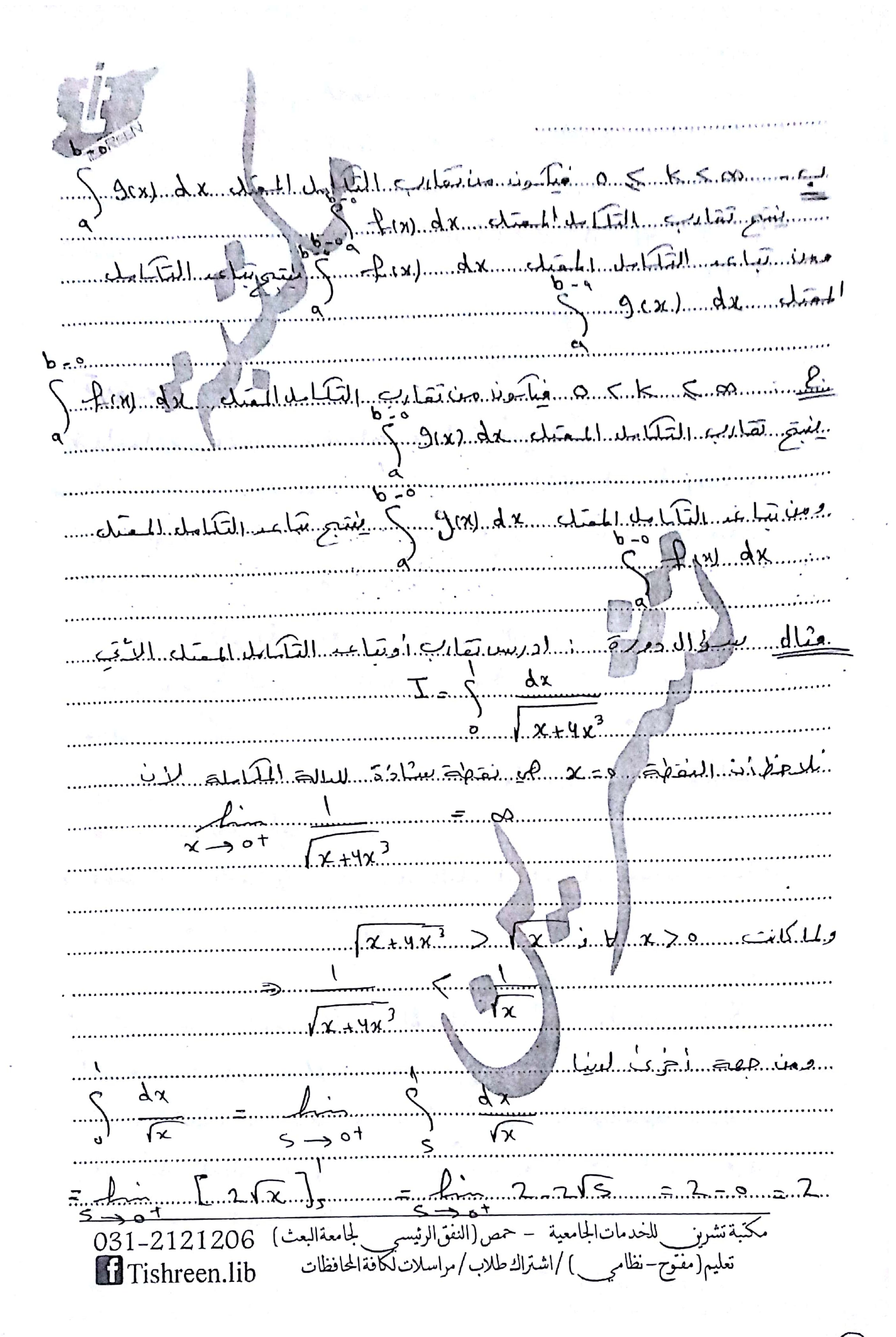
ومن تباعد التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ ينتج تباعد التكامل المعتل $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ الموافق للدالة العظمى

[2] : اختبار النسبة : إذا كان التكاملات المعتلان $\int_a^{b} g(x)\,dx$ و $\int_a f(x)\,dx$ تكاملين موجبين والنقطة $b$ هي نقطة شاذة لكل من $f$ و $g$ و $\forall x \in [a, b[ ; g(x) > 0$

إذا كان $\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

نميز الحالات الآتية :

أ- إذا كان $0 < k < \infty$ فلهما طبيعة واحدة



ب) $0 \le k < \infty$ فيكون من تقارب التكامل المعتل $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ ينتج تقارب التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$

ومن تباعد التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ ينتج تباعد التكامل المعتل $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$

ج) $0 < k \le \infty$ فيكون من تقارب التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ ينتج تقارب التكامل المعتل $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$

ومن تباعد التكامل المعتل $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ ينتج تباعد التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$

**مثال:** سؤال دورة: ادرس تقارب أو تباعد التكامل المعتل الآتي

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$$

نلاحظ أن النقطة $x=0$ هي نقطة شاذة للدالة المكاملة لأن

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} = \infty$$

ولما كانت $\sqrt{x+4x^3} > \sqrt{x}\ ;\ \forall x>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{s\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_s^1 = \lim_{s\to 0^+} 2-2\sqrt{s} = 2-0 = 2$$

وعندها هذا التكامل المعتل متقارب

وعندها نقول أن التكامل المعتل المعطى متقارب

مثال محلول: ادرس تقارب التكامل المعتل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$

نقارنه مع $\frac{1}{\sqrt{x}}$

« التقارب المطلق والتقارب المشروط »

* تعريف التقارب المطلق: ليكن التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x) dx$ يكون هذا التكامل متقارب مطلقاً إذا تقارب التكامل المعتل الآتي: $\int_a^{b-0} |f(x)| dx$

أما إذا كان $\int_a^{b-0} |f(x)| dx$ هذا التكامل المعتل متباعد فنقول بأن التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x) dx$ متباعد مطلقاً

ملاحظة: كل تكامل معتل من النوع الثاني متقارب مطلقاً هو متقارب لكن العكس غير صحيح

* التقارب المشروط: إذا كان التكامل المعتل متقارب ومتباعد مطلقاً فهو متقارب مشروطاً

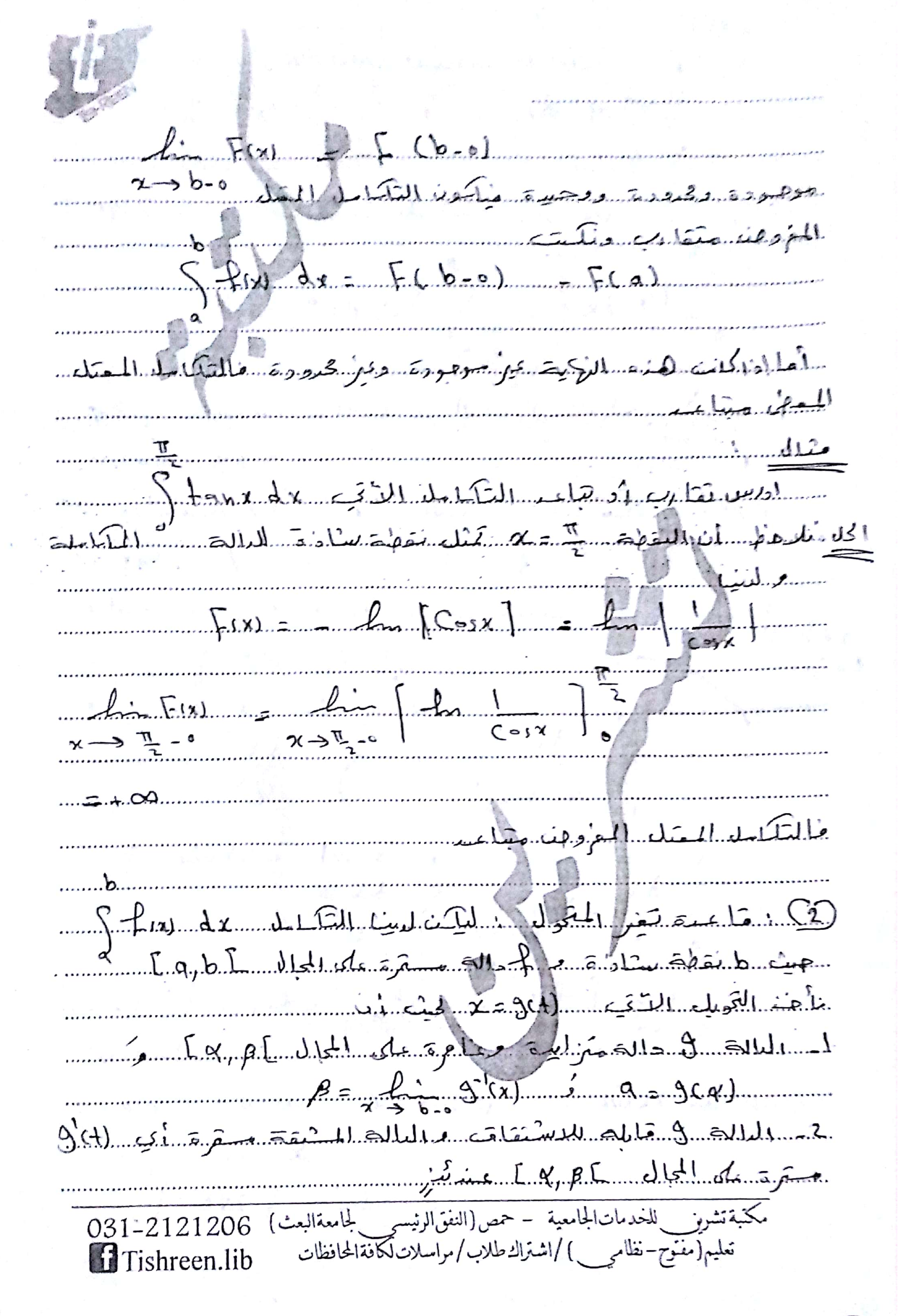
♡ حساب التكاملات المعتلة من النوع الثاني ♡

① قاعدة نيوتن لايبنتز:

ليكن التكامل المعتل $\int_a^{b-0} f(x) dx$ حيث $b$ هي نقطة شاذة

فإذا كان للدالة $f(x)$ دالة أصلية $F(x)$ على المجال $[a,b[$

بحيث تكون المبرهنة الآتية



$\lim_{x\to b-0} F(x) = F(b-0)$

موجودة ومحدودة ووحيدة فيكون التكامل المعتل المعزو عند متقارب ونكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a)$$

أما إذا كانت هذه النهاية غير موجودة وغير محدودة فالتكامل المعتل المعزو متباعد

**مثال:**

ادرس تقارب أو تباعد التكامل الآتي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$

**الحل:** نلاحظ أن النقطة $x=\frac{\pi}{2}$ تمثل نقطة شاذة للدالة المكاملة ولدينا

$$F(x) = -\ln[\cos x] = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} F(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left[\ln\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=+\infty$

فالتكامل المعتل المعزو متباعد

(2) قاعدة تغير المتحول: ليكن لدينا التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$

حيث b نقطة شاذة و f دالة مستمرة على المجال $[a,b[$

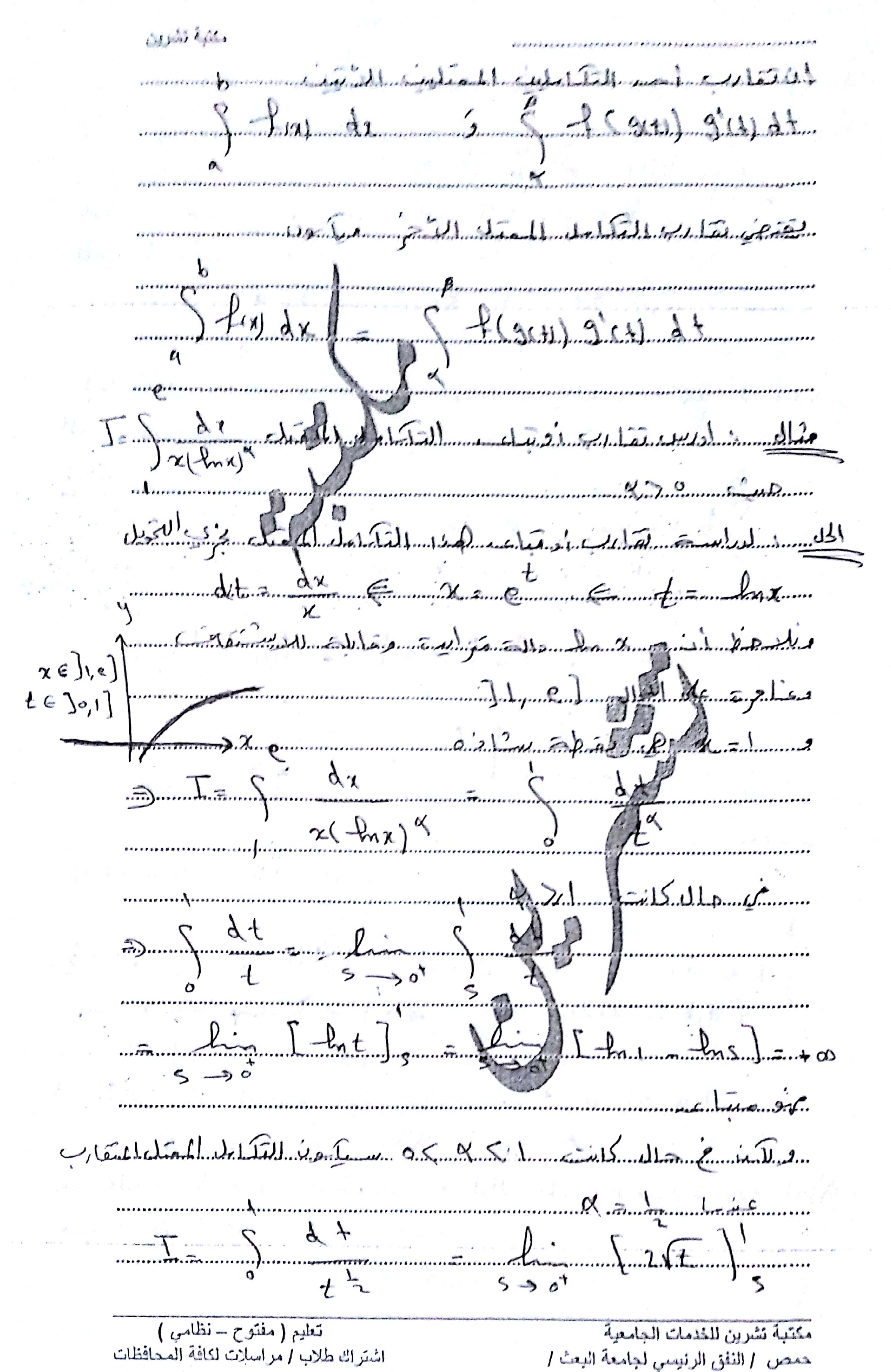
نأخذ التحويل الآتي $x=g(t)$ بحيث:

1- الدالة g دالة متزايدة ومتناهية على المجال $[\alpha,\beta[$ و

$a=g(\alpha)$ و $\beta=\lim_{x\to b-0} g'(x)$

2- الدالة g قابلة للاشتقاق والدالة المشتقة مستمرة أي $g'(t)$

مستمرة على المجال $[\alpha,\beta[$ عندئذٍ




التقارب أحد التكاملين المعتلين الآتيين

$\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$

يقتضي تقارب التكامل المعتل الآخر ومنه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

**مثال:** ادرس تقارب أو تباعد التكامل المعتل $I=\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$

حيث $\alpha>0$

**الحل:** لدراسة تقارب أو تباعد هذا التكامل المعتل نجري التحويل

$t=\ln x \Leftarrow x=e^t \Leftarrow dt=\frac{dx}{x}$

نلاحظ أن $\ln x$ دالة متزايدة وقابلة للاشتقاق

ومستمرة على المجال $]1,e]$

و $x=1$ نقطة شاذة

$$\Rightarrow I=\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

في حال كانت $\alpha=1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t} = \lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{dt}{t}$$

$$= \lim_{s\to 0^+}[\ln t]_s^1 = \lim_{s\to 0^+}[\ln 1 - \ln s] = +\infty$$

فهو متباعد.

ولكن في حال كانت $0<\alpha<1$ سيكون التكامل المعتل متقارب

عندما $\alpha=\frac{1}{2}$

$$I=\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \lim_{s\to 0^+}[2\sqrt{t}]_s^1$$

$$= \lim_{s \to 0^+} [2\sqrt{1} - 2\sqrt{s}] = 2 - 0 = 2$$

فهو متقارب

إذاً: إن هذا التكامل المعتل متقارب من أجل $0 < \alpha < 1$

ومتباعد من أجل $\alpha \geq 1$

ملاحظة: يكون من المفيد أحياناً إجراء التحويل التالي $t = g(x)$

أو $t = \varphi(x)$ حيث إن $\varphi(x)$ تحقق الشروط الواردة في المبرهنة (9)

③ قاعدة المكاملة بالتجزئة:

ليكن $g$ و $f$ تابعين معرفين وقابلين للاشتقاق باستمرار على المجال $[a, b[$ حيث $b$ هي نقطة شاذة.

فإذا كانت النهاية الآتية موجودة ومحدودة ومنتهية أي:

$$\lim_{x \to b-0} [f(x) \cdot g(x)] = L = f(b-0) \cdot g(b-0)$$

فإن تقارب أحد التكاملين المعتلين الآتيين $\int_a^b f(x) g'(x)\, dx$

أو $\int_a^b g(x) f'(x)\, dx$ ينتج تقارب التكامل المعتل الآخر

ويكون:

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = L - [f(a) \cdot g(a)] - \int_a^b g(x) f'(x)\, dx$$

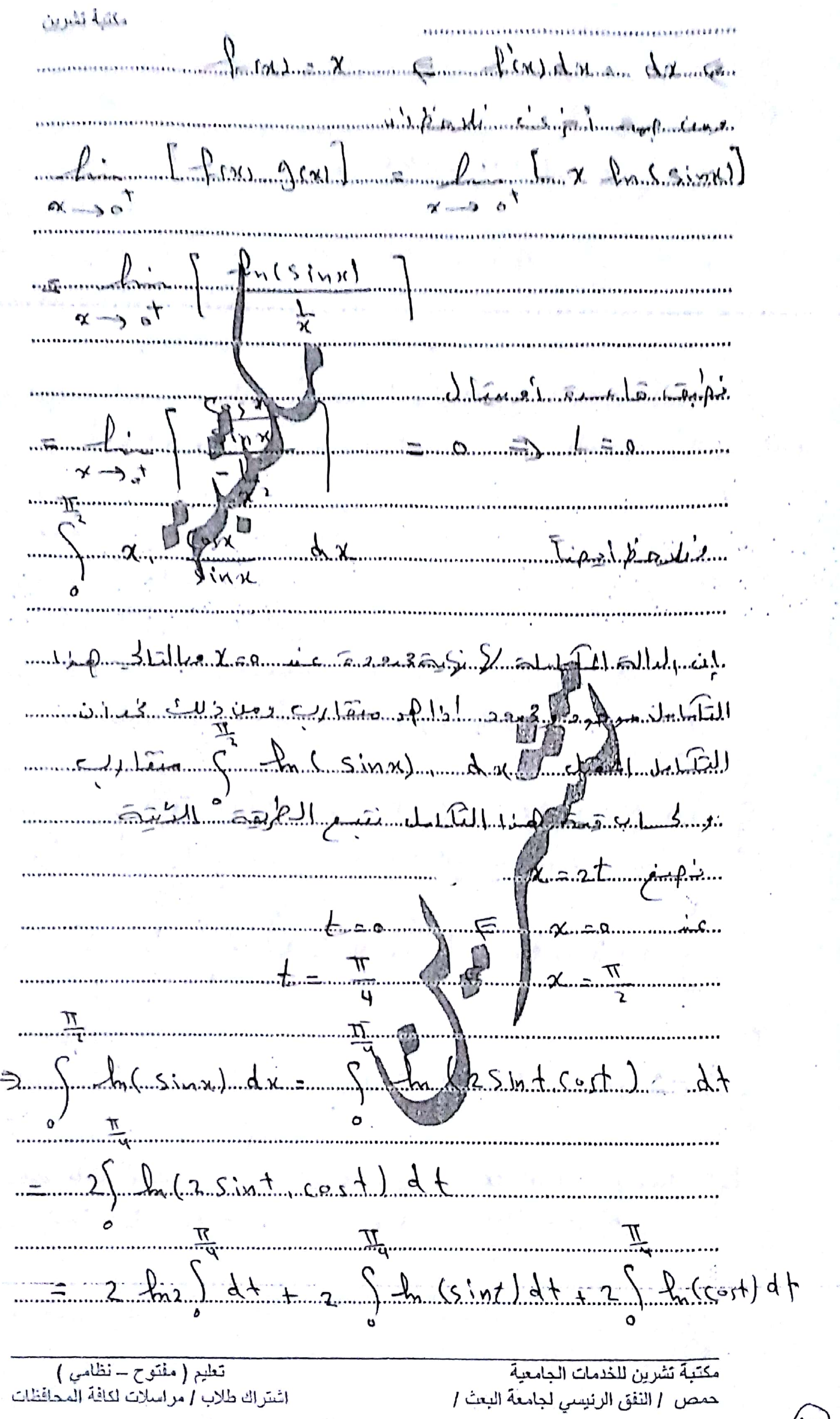
مثال: سؤال دورة

ادرس تقارب أو تباعد التكامل المعتل الآتي: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$

الحل:

نلاحظ بأن النقطة الشاذة هي النقطة $a = 0$ للتابع $\ln(\sin x)$

ونأخذ $g(x) = \ln(\sin x) \Leftarrow g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$



$f(x) = x \Leftarrow f'(x)dx = dx$ ومنه

حسب مبرهنة لوبيتال

$$\lim_{x \to 0^+} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to 0^+} [x \ln(\sin x)]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[ \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \right]$$

نطبق قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[ \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} \right] = 0 \Rightarrow L = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$ لنأخذ التكامل

إن الدالة المكاملة لا تؤول إلى ∞ عند $x=0$ وبالتالي فإن التكامل موجود وهو ليس متقارب ومن ذلك نجد أن التكامل المعتل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$ متقارب، ولحساب قيمة هذا التكامل نتبع الطريقة الآتية

نفرض $x = 2t$

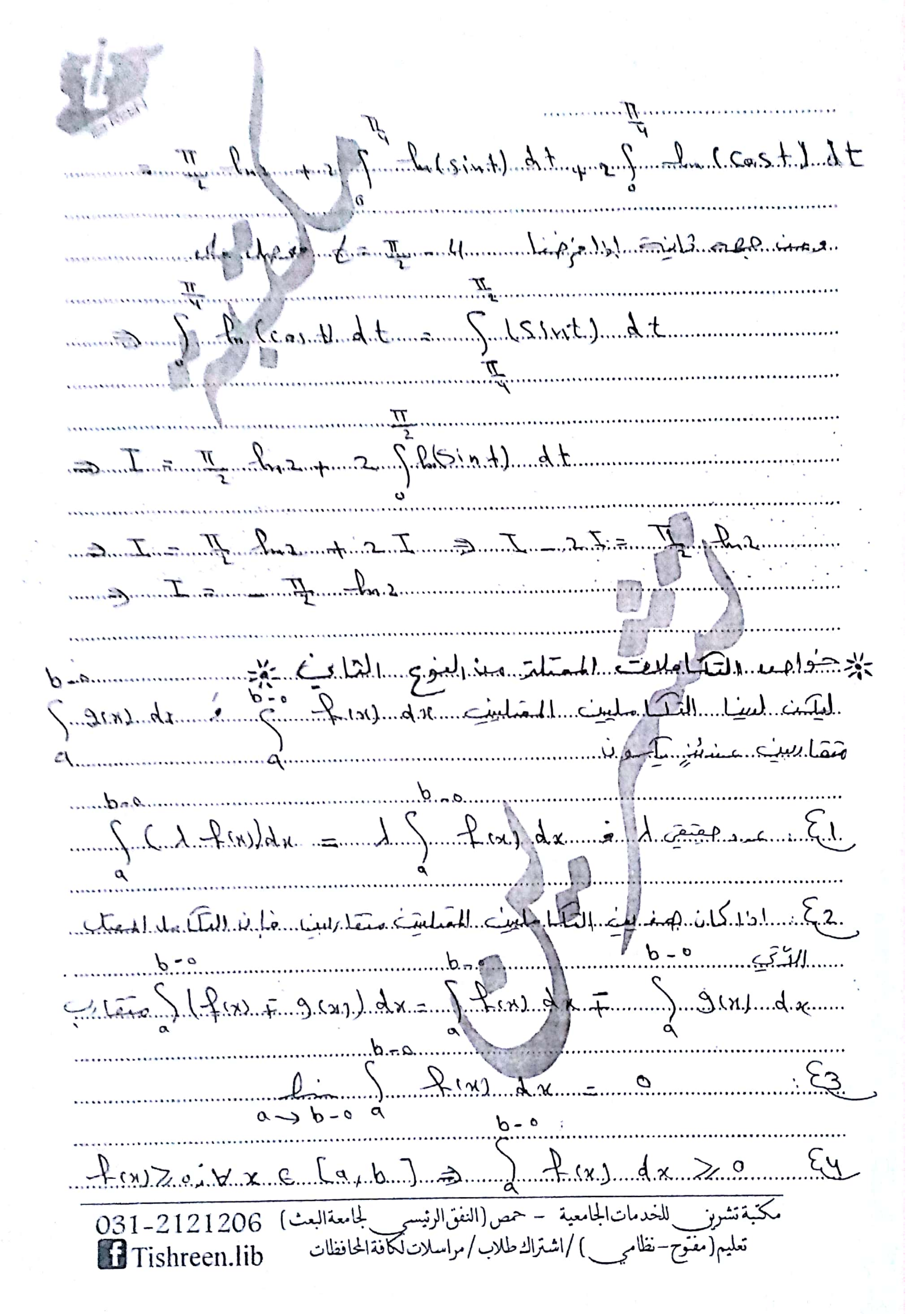
عند $x = 0 \Leftarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Leftarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t \cos t)\, 2\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t \cdot \cos t)\, dt$$

$$= 2\ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\, dt$$



$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt$$

نجري تبديل في الثانية إذا فرضنا $t = \frac{\pi}{2} - u$ ...

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \Rightarrow I - 2I = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

☼ خواص التكاملات المعتلة من النوع الثاني ☼

ليكن لدينا التكاملين المعتلين $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ ، $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ متقاربين عندئذٍ يكون:

1. $\int_a^{b-0} (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ ، $\lambda$ عدد حقيقي.

2. إذا كان كل من التكاملين المعتلين متقاربين فإن التكامل المعتل الآتي متقارب:

$$\int_a^{b-0} (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^{b-0} f(x)\,dx \mp \int_a^{b-0} g(x)\,dx$$

3. $\lim\limits_{a \to b-0} \int_a^{b-0} f(x)\,dx = 0$

4. $f(x) \geq 0 \ ; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx \geq 0$

(٤٥) $b \to \infty$ , $f(x) \le g(x) \; , \; \forall x \in [a, b[$ $\Rightarrow$

$$\int_a^{b\to\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{b\to\infty} g(x)\,dx$$

مثال: ادرس تقارب أو تباعد التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

الحل: إن $b=1$ هي نقطة شاذة

يمكن استخدام طريقة تغيير المتحول بحيث نفرض $t = \arcsin x$

$\Leftarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ والتي تغير حدود التكامل

عندما $x=0 \Leftarrow t=0$ و عندما $x=1 \Leftarrow t=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال: ادرس تقارب أو تباعد التكامل $I = \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

وبنفس الطريقة السابقة نجد أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال: ((سؤال دورة)) ادرس تقارب أو تباعد التكامل

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\ln[1+\sqrt{x}]}$ نستخدم اختبار المقارنة البسيطة

حيث $f(x) = \frac{1}{\ln[1+\sqrt{x}]}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ وهو وظيفة

((انتهت المحاضرة الأخيرة))

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

((إعداد: أ. ماجد الشميري))